On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

On désigne par f' la fonction dérivée de f et par F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 0$.

Dans le repère orthonormal d'unité 2 cm de l'annexe 2, la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée représente la fonction f et la droite D est sa tangente au point $\mathrm{A}\left(0\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.

Première partie

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptotes en $-\infty$ la droite d'équation $y = 0$ et en $+\infty$ la droite d'équation $y = 5$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{5\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$.
3. Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. En utilisant le résultat de la question 2., déterminer une équation de la droite D.

Deuxième partie

1. Pour tout réel x, exprimer $F(x)$ en fonction de x.
2. Vérifier que $F(1) = 5\ln\left(\dfrac{\mathrm{e} + 1}{2}\right)$.
3. Sur l'annexe 2, le domaine grisé est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

   Calculer l'aire, en unités d'aire, de ce domaine et en donner une valeur approchée arrondie au dixième.

ANNEXE 2

Exercice 4