

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5; 8]$ par

$$f(x) = 20(x - 1)e^{-0,5x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0,5; 8]$

1. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5; 8]$

$$f'(x) = 10(-x + 3)e^{-0,5x}$$

- b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0,5; 8]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .

2. Construire la courbe représentative (\mathcal{C}) de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm, sur l'axe des ordonnées.

3. Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0,5; 8]$ par $F(x) = \frac{-40(x+1)}{e^{0,5x}}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5; 8]$.

4. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_{1,5}^5 f(x) dx$.

Partie B : Application économique

Une entreprise produit sur commande des bicyclettes pour des municipalités.

La production mensuelle peut varier de 50 à 800 bicyclettes.

Le bénéfice mensuel réalisé par cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A de la façon suivante :

si, un mois donné, on produit x centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise ce même mois.

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle.

1. a. Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise ce mois-là un bénéfice de 7 989 euros.
b. Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 408 bicyclettes un mois donné.
2. *Pour cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte*

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la **partie A** et le modèle précédent.

Justifier chaque réponse.

- a. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?
b. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum. Préciser alors ce bénéfice à l'euro près.
c. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice supérieur à 8 000 euros ?