Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x(1 - \ln x).$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. **a.** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0 (on rappelle que la limite en 0 de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ [par $u(x) = x \ln x$ est 0).

b. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de f).

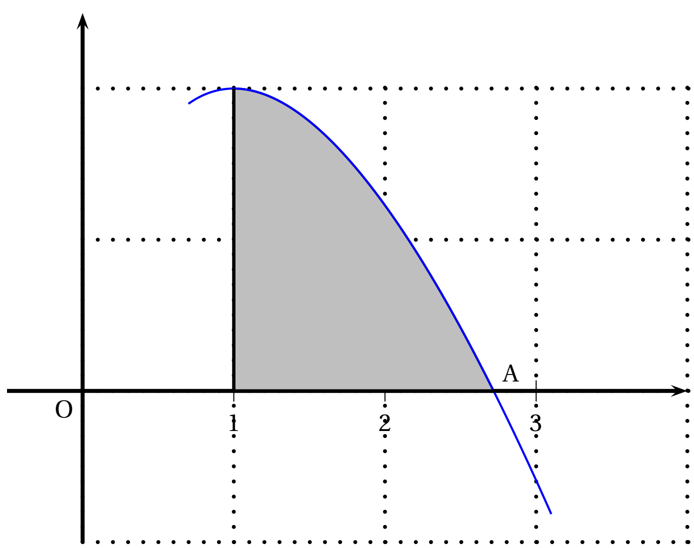
c. Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Résoudre sur $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point A.

3. **a.** Résoudre, par un calcul, l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

b. Montrer que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x^2\left(\frac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

c. On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.



Calculer en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de $\mathcal{D}$ puis, en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.