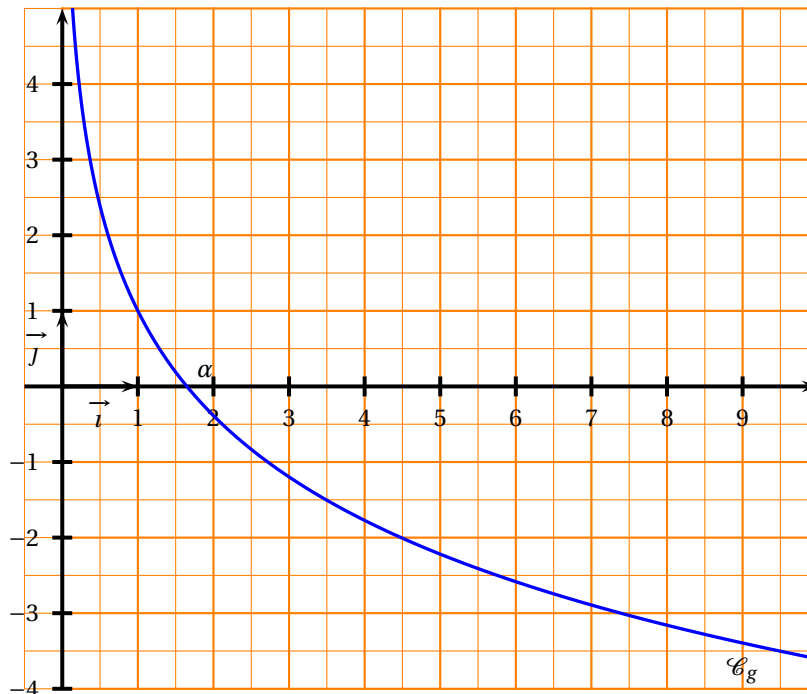


## Partie A - Étude préliminaire

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = 1 - 2\ln(x).$$

On donne ci-dessous sa courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Cette courbe  $\mathcal{C}_g$  coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse  $\alpha$ .



1. Déterminer la valeur exacte de  $\alpha$ .
2. On admet que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
Donner, en justifiant, le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

## Partie B - Étude d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  (on rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ).

On admettra que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

2. a. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
b. Étudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .
3. a. Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

On pourra remarquer que  $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + \frac{1}{x}$ .

- b. Soit  $I = \frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx$ . Déterminer la valeur exacte de  $I$ , puis en donner une valeur approchée au centième près.

## Partie C - Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Sa production pour ce type de pièces varie entre 1 000 et 5 000 pièces par semaine, selon la demande.

On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.

Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction  $f$  définie dans la partie B, avec  $x$  exprimé en milliers de pièces et  $f(x)$  exprimé en euros.

- 
1. Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces.
  2. *Dans cette question, la réponse sera soigneusement justifiée. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
- Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 € ?