Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ telles que pour tout réel x de cet intervalle :

$$f(x) = (x - \mathrm{e})(\ln x - 1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln x - \frac{\mathrm{e}}{x}$$

La courbe représentative de la fonction g dans un repère du plan est donnée en annexe et l'unité graphique est 2 cm .

Partie 1

1. Démontrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer $g(\mathrm{e})$ et, grâce à la question 1, donner le signe de $g(x)$ pour tout x strictement positif.

Partie 2

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de f Démontrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.
3. Établir le tableau des variations de la fonction f.
   (*On y fera figurer les limites de la fonction f en* 0 *et en* $+\infty$).
4. Représenter graphiquement la fonction f sur la feuille annexe jointe au sujet.

Partie 3

Soit F la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle :

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \mathrm{e}x\right)\ln x + 2\mathrm{e}x - \frac{3}{4}x^2$$

1. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. On considère le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$ l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   a. Hachurer ce domaine sur le dessin.
   b. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   c. En déduire une valeur approchée arrondie au centième de l'aire du domaine exprimée en cm^2.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 4