

Partie A

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par :

$$f(x) = 0,3x + 1,5 - 0,9\ln(x + 1).$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 20]$.

Étudier les variations de f sur $[0 ; 20]$ et dresser son tableau de variation.

2. On donne la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par :

$$g(x) = -0,05x - 1,5 + 0,9\ln(x + 1).$$

On admet que g est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 17]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[17 ; 20]$.

- a. Justifier qu'il existe un unique réel x_0 dans l'intervalle $[0 ; 17]$ tel que $g(x_0) = 0$.
Donner un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2} .
- b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0 ; 20]$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats de la partie A. On demande de justifier les réponses.

Dans une petite ville, un promoteur immobilier projette de construire un lotissement dont le nombre de maisons ne pourra pas dépasser 20 maisons construites. Le coût de production, en millions d'euros, pour n maisons construites ($0 \leq n \leq 20$) est donné par :

$$C(n) = 0,3n + 1,5 - 0,9\ln(n + 1).$$

Chaque maison est vendue 250 000 euros.

1.
 - a. Calculer $C(0)$. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
 - b. Combien de maisons le promoteur doit-il prévoir de construire pour que le coût de production soit minimal?
2.
 - a. Montrer que le bénéfice réalisé pour la fabrication de n maisons est, en millions d'euros, donné par $B(n) = -0,05n - 1,5 + 0,9\ln(n + 1)$.
 - b. Déterminer le nombre de maisons à construire pour que le bénéfice soit maximal.
Quel est alors ce bénéfice (à 100 euros près) ?
 - c. Déterminer le nombre minimal de maisons à construire pour que le promoteur ne travaille pas à perte.

Pour la question suivante, on explicitera la démarche utilisée. Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

- d. À partir de combien de maisons construites le bénéfice du promoteur est-il supérieur à 200 000 euros ?