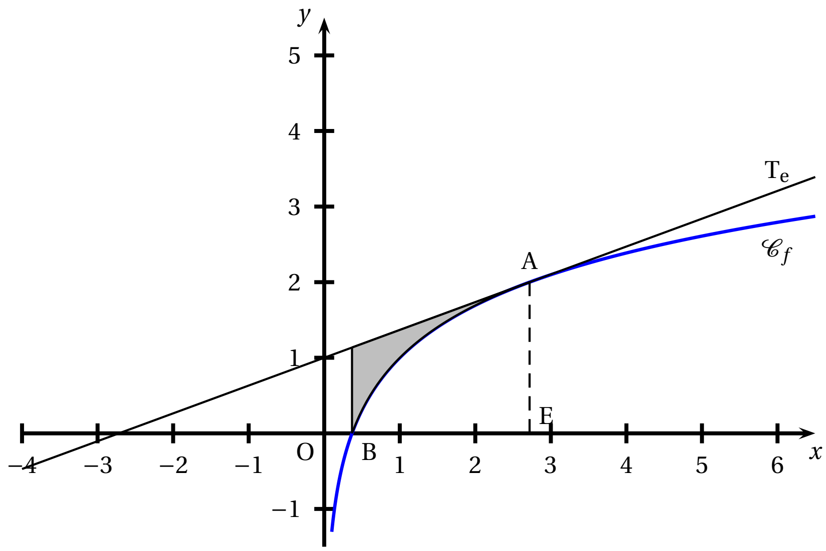
On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
Le point A(e ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$ et on note $\mathrm{T_e}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
Le point C est le point d'intersection de la tangente $\mathrm{T_e}$ et de l'axe des abscisses. Le point E a pour coordonnées (e ; 0).
On admettra que sur $]0~;~+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de $\mathrm{T_e}$.



1. **a.** Le point B est le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
   Calculer les coordonnées du point B.

   b. Démontrer que, pour $x \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $f(x) \geqslant 0$.

2. **a.** Déterminer une équation de $\mathrm{T_e}$.

   b. En déduire les coordonnées du point C.

   c. Vérifier que les points E et C sont symétriques par rapport à O, origine du repère.

   On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = x\ln x$.

3. **a.** Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.

   b. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} (1+\ln x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter ce nombre.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathrm{T_e}$ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par B et E. Ce domaine est grisé sur le graphique. Donner une valeur approchée arrondie au millième de cette aire.