

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère la fonction A définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par

$$A(x) = \frac{4}{1 - e^{-0,039x}}.$$

1. Calculer la limite de $A(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction A est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et on note A' sa fonction dérivée sur cet intervalle. Montrer que, pour tout x appartenant à $[1 ; +\infty[$ on a

$$A'(x) = \frac{-0,156e^{-0,039x}}{(1 - e^{-0,039x})^2}.$$

3. Justifier que $A'(x) < 0$ pour tout x appartenant à $[1 ; +\infty[$.
Dresser le tableau de variations de A sur $[1 ; +\infty[$.

Partie B

Un particulier souhaite réaliser auprès d'une banque un emprunt d'un montant de 100 000 € à un taux annuel fixé. On admet que, si l'on réalise cet emprunt sur une durée de n années ($n \geq 1$), le montant d'une annuité (somme à rembourser chaque année, pendant n ans) est donné en milliers d'euros par

$$A(n) = \frac{4}{1 - e^{-0,039n}}$$

Pour un emprunt fait sur n années ($n \geq 1$), on note :

$S(n)$ le montant total payé à la banque au bout des n années (en milliers d'euros) ;

$I(n)$ le total des intérêts payés à la banque au bout des n années (en milliers d'euros).

Dans les questions qui suivent, on donnera les résultats arrondis au millième.

1. Calculer $A(1)$, $A(10)$ et $A(20)$ et interpréter ces résultats.
2. Démontrer que $I(n) = \frac{4n}{1 - e^{-0,039n}} - 100$ pour tout $n \geq 1$.
3. Recopier et compléter le tableau suivant sur votre feuille.

Durée de l'emprunt n	10 ans	15 ans	20 ans
Montant d'une annuité $A(n)$			
Montant $S(n)$ des n annuités payées à la banque			
Intérêts $I(n)$ versés à la banque			

4. Pour faciliter l'étude des valeurs de $A(n)$, $S(n)$ et $I(n)$, on utilise les fonctions A , S et I définies sur $[1 ; 20]$ par :

$$A(x) = \frac{4}{1 - e^{-0,039x}} ; \quad S(x) = \frac{4x}{1 - e^{-0,039x}} ; \quad I(x) = \frac{4x}{1 - e^{-0,039x}} - 100.$$

On a représenté respectivement en ANNEXE 1 ci-après les fonctions A et S par les courbes \mathcal{C}_A et \mathcal{C}_S sur l'intervalle $[1 ; 20]$.

- a. Expliquer comment utiliser le graphique de l'ANNEXE 1 pour retrouver $I(10)$.
- b. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Expliquer comment déterminer graphiquement sur l'ANNEXE 1 le sens de variation du montant total des intérêts à payer en fonction de la durée du remboursement de l'emprunt.

ANNEXE 1

À rendre avec la copie

