On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \left(x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b. En remarquant que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   Interpréter graphiquement le résultat.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 3x - 2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'ensemble des nombres réels.

3. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en son point d'abscisse 0.

4. On prend comme unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées.
   Tracer la droite (T) et la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 8]$ dans le plan (P).

5. **a.** Déterminer graphiquement le nombre de solutions sur l'intervalle $[0\ ;\ 8]$ de l'équation $f(x) = 0,4$.

   b. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au centième de la plus grande des solutions de l'équation considérée à la question 5. a.