Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine.
L'évolution du taux de gaz dans l'air peut être modélisé grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$$

où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en parties pour million (ppm).

1. **a.** On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe pour x élément de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   Donner le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. On admet que le taux de gaz dans l'air est négligeable après 5 minutes. C'est pourquoi, dans la suite de l'exercice, on restreindra l'étude de la fonction f à l'intervalle $[0\,;5]$.

   Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$ est donnée en annexe 2.

   a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par
   $F(x) = (-2-2x)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur cet intervalle.

   b. Calculer la valeur moyenne m (exprimée en ppm) du taux de gaz pendant les 5 minutes.
   On déterminera la valeur exacte de m puis on donnera sa valeur approchée arrondie à $0,01$ ppm près.

3. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

   On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse $0,65$ ppm pendant plus d'une minute. Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

ANNEXE 2

Représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.