PARTIE I : ÉTUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle :

$$f(x) = 5(1-\ln x)(\ln x - 2)$$

et dont la représentation graphique est donnée en annexe 2.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.
2. **a.** Déterminer le signe de l'expression $5(1-X)(X-2)$ suivant les valeurs du réel X.

   b. En déduire que le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par le tableau suivant :

x	0		e		e^2		$+\infty$
signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

3. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{5(3-2\ln x)}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. En déduire les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
4. Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
5. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ puis donner une valeur approchée arrondie à $0,01$ près de ces solutions.

PARTIE II : APPLICATION

Une entreprise fabrique et revend des jouets.
$f(x)$ représente le résultat (bénéfice ou perte) en milliers d'euros qu'elle réalise lorsqu'elle fabrique x centaines de jouets, pour x compris entre 1 et 10, f désignant la fonction étudiée dans la partie I.

1. Déterminer, à un jouet près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte.
   Interpréter concrètement le résultat de la question I. 2. Comment le lit-on sur le graphique ?
2. Cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1 000 euros.
   Combien de jouets doit-elle fabriquer ? Justifier la réponse.

ANNEXE 2