Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3\ln(x+1) - 1,75 - 3\ln 2.$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,10]$; on note f' sa fonction dérivée sur cet intervalle.
Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$,

$$f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}.$$

3. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,10]$.

b. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0\,;\,10]$.

c. Calculer la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au dixième du maximum de la fonction f sur $[0\,;\,10]$.

4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[5\,;\,10]$ une solution unique x_0.

b. Donner, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée par défaut à 10^{-1} de x_0.

5. On admet qu'une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,10]$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = -\frac{1}{12}x^3 + x^2 - (4,75 + 3\ln 2)x + 3(x+1)\ln(x+1).$$

Montrer que la valeur décimale arrondie au dixième de $\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ est 2,8.

Partie B

À l'approche des fêtes de fin d'année, un supermarché souhaite commercialiser des guirlandes de Noël.
On note x le nombre de guirlandes qu'il souhaite vendre (en milliers de guirlandes). On suppose que x est un réel compris entre 0 et 10.
Le bénéfice réalisé pour la vente de x milliers de guirlandes, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction f définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3\ln(x+1) - 1,75 - 3\ln 2.$$

Déduire de la **partie A** les réponses aux questions suivantes (les réponses seront données à la centaine de guirlandes vendues près). On explicitera la méthode utilisée.

1. Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice sur ce produit ?

2. Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice maximal ? (à 100 euros près).

3. Quel bénéfice moyen peut espérer le supermarché en vendant entre 0 et 10 000 guirlandes ?