Partie A

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0~;~20]$ par

$$f(x) = \left(3\mathrm{e}^2 - x\right)\ln x + 10.$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0.

   b. Calculer la valeur exacte de $f\left(\mathrm{e}^2\right)$, puis une valeur approchée à 0,01 près.

2. Montrer que, pour tout x de $]0~;~20]$, $f'(x) = -\ln x + \dfrac{3\mathrm{e}^2}{x} - 1$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.

3. On admet que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $]0~;~20]$ et que son tableau de variations est le suivant :

x	0		e^2		20
$f'(x)$	‖	$\searrow$	0	$\searrow$	$f'(20)$

   a. À l'aide du tableau de variations, donner le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~20]$.

   b. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~20]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

4. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[0{,}6~;~0{,}7]$, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution notée α. À la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 0,001 près par excès.

   b. Démontrer que $f(x)$ est négatif pour tout $x \in]0~;~\alpha[$ et que $f(x)$ est positif pour tout $x \in]\alpha~;~20]$.

Partie B

Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de DVD, x appartenant à $]0~;~20]$.
Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction étudiée dans la partie A.
En utilisant les resultats de la partie A :

1. déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif ;
2. déterminer le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.