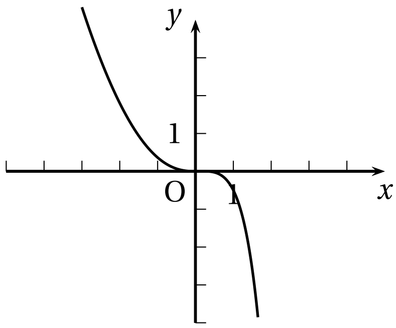
On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x^2 e^{x-1}.$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.
Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



1. Quelle conjecture pourrait-on faire concernant le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$ en observant cette courbe ?

Dans la suite du problème, on va s'intéresser à la validité de cette conjecture.

2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = xg(x)$ où $g(x) = 1 - (x+2)e^{x-1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Pour la suite, on admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

3. Étude du signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

- **a.** Calculer les limites respectives de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.
  On pourra utiliser sans la démontrer l'égalité : $g(x) = 1 - \dfrac{xe^x + 2e^x}{e}$.
- **b.** Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs du nombre réel x.
- **c.** En déduire le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variation en y reportant les limites déterminées précédemment.
- **d.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Justifier que $0,20 < \alpha < 0,21$.
- **e.** Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Sens de variation de la fonction f

- **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
- **b.** En déduire le sens de variation de la fonction f
- **c.** Que pensez-vous de la conjecture de la question 1 ?