Partie A

On considère la fonction g définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{2}.$$

1. Étudier les variations de g sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[1\ ;\ +\infty[$.

3. En déduire que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{\mathrm{e}}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 4xg(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

3. **a.** Montrer que, dans l'intervalle $[2\ ;\ 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.

b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.