L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique de l'annexe 2 donne la représentation graphique de la fonction C.

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

1. Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_1 d'équation $y = 400x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

a. Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_2 d'équation $y = 680x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

b. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\ 10]$ par

$$B(x) = 680x - C(x).$$

Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;10]$ on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$

c. Étudier les variations de la fonction B sur $[0\,;10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par

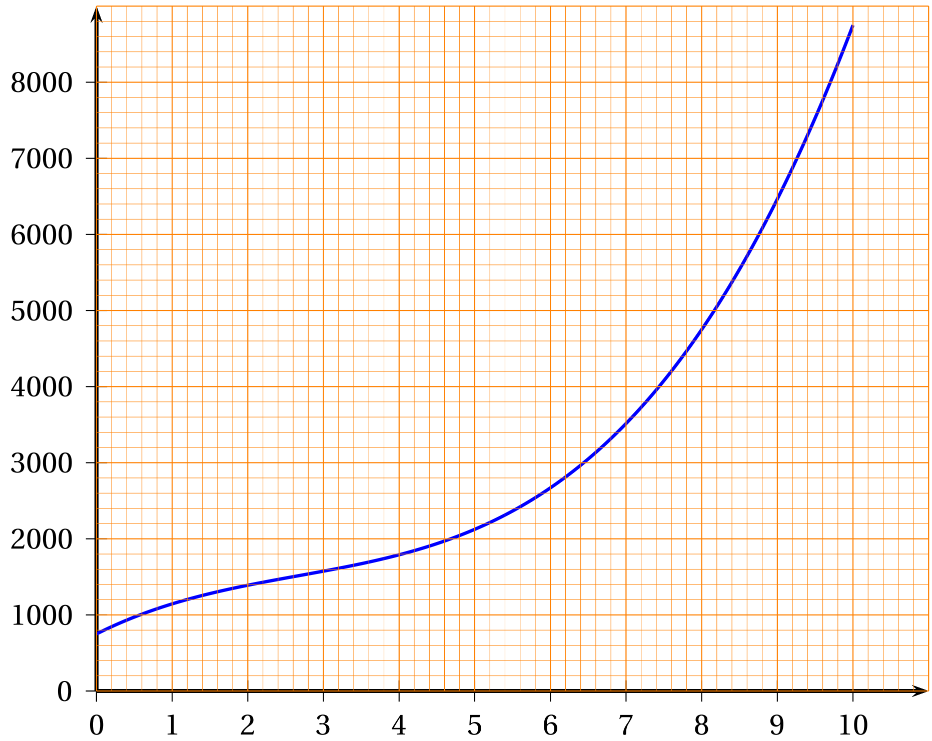
$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$ on a :

$$C'_M(x) = \frac{30(x-5)\left(x^2+x+5\right)}{x^2}.$$

2. **a.** Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0\,;10]$.

b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?


8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10