

On considère les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = -x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $\Delta$  la droite représentant la fonction  $g$  dans un repère orthonormé du plan.

**Partie A** Position relative de  $\mathcal{C}_f$  et de l'une de ses tangentes.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 est la droite  $\Delta$ .
2.
  - a. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h'(x) = 1 - e^{-x}$ .
  - b. Étudier le signe de  $h'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
  - c. En déduire le sens de variation de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de sa tangente au point d'abscisse 0.

**Partie B** Calcul d'aire

1. Montrer que  $\int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$ .
2. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Soit  $a$  un nombre réel vérifiant  $a > 1$ . On appelle  $D$  le domaine colorié sur le graphique en **annexe**.  
On note  $\mathcal{A}$  l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine  $D$ .
  - a. Déterminer en fonction de  $a$  la valeur de  $\mathcal{A}$ .
  - b. Déterminer la limite de  $\mathcal{A}$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .

