Une entreprise de services à la personne propose dans ses services l'entretien de jardins. Pour ce service, cette entreprise a recours à des employés à temps partiel pour une durée globale de x heures, et elle loue le matériel nécessaire pour une durée globale de y heures. La surface de jardin traitée en une semaine, exprimée en centaines de m^2, est donnée par la fonction $f(x\,;\,y) = \sqrt{2xy}$ où x et y sont exprimées en heures.

Une heure de travail coûte 15 euros et une heure de location du matériel coûte 30 euros. Les contraintes matérielles imposent que $0 \leqslant x \leqslant 120$ et $0 \leqslant y \leqslant 100$.

La figure 1 donnée en annexe représente la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = f(x\,;\,y)$.

La figure 2 donnée en annexe représente la projection orthogonale de la surface $\mathscr{S}$ sur le plan $(x\mathrm{O}y)$, les courbes de niveau de cette surface étant représentées pour z variant de 10 en 10.

1. **a.** Les points $\mathrm{A}(20\,;\,40\,;\,z_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}\left(60\,;\,y_{\mathrm{B}}\,;\,60\right)$ sont des points de la surface $\mathscr{S}$.

   Déterminer pour chacun la coordonnée manquante.

   b. Lire sur la figure 1 les coordonnées du point C et en donner une interprétation concrète.

   c. Placer sur la figure 1 le point D de coordonnées $(10\,;\,80\,;\,40)$.

   d. Donner la nature de la courbe de niveau $z = 50$.

2. Les contraintes financières imposent de fixer le coût hebdomadaire correspondant à 2 400 euros.

   a. Démontrer que x et y sont liés par la relation $y = -\dfrac{1}{2}x + 80$.

   b. Quelle est la nature de l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient $y = -\dfrac{1}{2}x + 80$?

   c. Représenter l'ensemble $(\mathscr{E})$ sur la figure 2 de l'annexe.

   d. En déduire graphiquement la surface de jardin maximum qu'on peut traiter avec un coût hebdomadaire de 2 400 euros.

3. **a.** Vérifier que, sous la contrainte $y = -\dfrac{1}{2}x + 80$, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$, g étant la fonction définie sur $[0\,;\,120]$ par $g(x) = \sqrt{160x - x^2}$.

   b. Démontrer que sur $]0\,;\,120]$, $g'(x) = \dfrac{80 - x}{\sqrt{160x - x^2}}$, g' désignant la fonction dérivée de g, puis démontrer que la fonction g admet un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,120]$.

   c. En déduire le temps de travail et la durée de location hebdomadaire qui permettent de traiter une surface maximum.

ANNEXE

Enseignement de spécialité : exercice 4

Figure 1 :

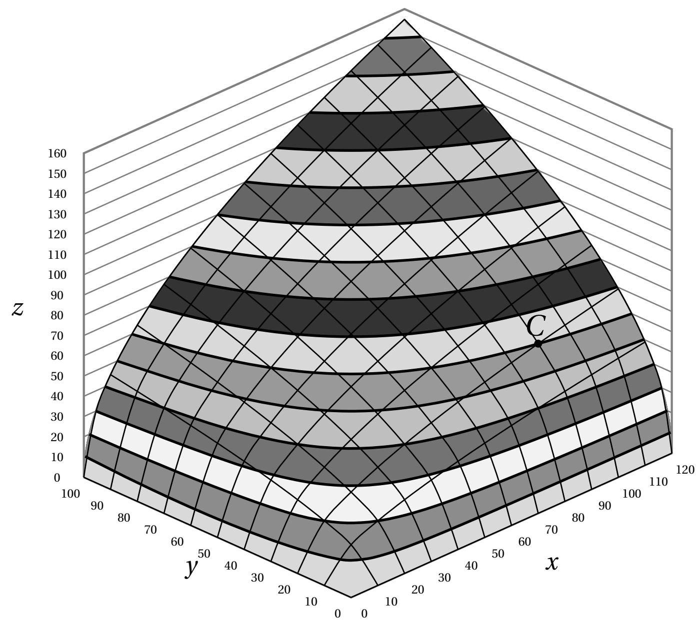

Figure 2 :