Chaque mois, un institut de sondage donne la cote de popularité d'un même groupe politique dans l'opinion publique. Les personnes sondées sont, soit favorables, soit défavorables à ce groupe. Initialement, il y a autant de personnes favorables à ce groupe politique que de personnes qui lui sont défavorables. De chaque mois au mois suivant, on considère que :

- 10 % des personnes qui étaient favorables à ce groupe politique ne le sont plus.
- 15 % des personnes qui n'étaient pas favorables à ce groupe politique le deviennent.

On note, pour tout entier naturel n :

- a_n, la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois soit favorable à ce groupe politique.
- b_n, la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois ne soit pas favorable à ce groupe politique.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$, la matrice traduisant l'état probabiliste au bout de n mois.

On note M la matrice de transition telle que, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.

Première partie

1. Déterminer la matrice P_0 donnant l'état probabiliste initial.
2. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à la situation.
3. On admet que $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

   Déterminer la matrice P_2 en détaillant les calculs, (on donnera les coefficients sous forme décimale arrondie au centième).
4. Déterminer l'état stable et interpréter ce résultat.

Deuxième partie

1. Montrer que $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,15$ pour tout entier naturel n.
2. On considère la suite (u_n) telle que $u_n = a_n - 0,6$ pour tout entier naturel n.
   - **a.** Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,75$.
   - **b.** En déduire que $a_n = -0,1 \times (0,75)^n + 0,6$ pour tout entier naturel n.
   - **c.** Calculer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$. Comment peut-on interpréter cette limite ? En quoi ce résultat est-il cohérent avec celui demandé à la question 4. de la première partie.