Pendant ses vacances d'été, Alex a la possibilité d'aller se baigner tous les jours. S'il va se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de $0,7$.
S'il ne va pas se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de $0,9$. Le premier jour de ses vacances, Alex va se baigner.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'Alex n'aille pas se baigner le n-ième jour.
- b_n la probabilité qu'Alex aille se baigner le n-ième jour.
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième jour.

On a donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (B représentant l'état « Alex va se baigner »).

   b. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe. Recopier et compléter $M = \begin{pmatrix} 0,1 & \dots \\ \dots & 0,7 \end{pmatrix}$

2. Calculer P_3, P_{10} et P_{20}. Quelle conjecture peut-on faire ?
3. **a.** Montrer que pour tout entier n non nul, $b_{n+1} = 0,9a_n + 0,7b_n$.

   b. En déduire que : $b_{n+1} = -0,2b_n + 0,9$.
4. On considère la suite u définie pour tout entier n non nul par $u_n = b_n - 0,75$.

   a. Montrer que u est une suite géométrique de raison $-0,2$; on précisera son premier terme.

   b. Déterminer la limite de la suite u.

   c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.
5. On suppose dans cette question que le premier jour de ses vacances, Alex ne va pas se baigner. Quelle est la probabilité qu'il aille se baigner le 20e jour de ses vacances ?