M. et M^{me} Martin, qui habitent une grand ville, aiment beaucoup voyager. Ils prévoient toujours de partir pendant l'été, soit à l'étranger, soit de visiter une région en France.
S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est de 0,4.
Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'années suivante est de 0,7.
En été 2009, ce couple est parti à l'étranger.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$ traduisant l'état probabiliste l'année $(2009+n)$, où a_n désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année $(2009+n)$ et b_n la probabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année $(2009+n)$.

Partie A

1. **a.** Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et E (F pour France et E pour étranger).

   b. En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord F puis E pour l'ordre des sommets. On notera M cette matrice.

2. **a.** Donner P_0, l'état probabiliste initial, l'année 2009.

   b. On donne les résultats suivants :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix} ; M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}444 & 0{,}556 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix} ; M^4 = \begin{pmatrix} 0{,}4332 & 0{,}5668 \\ 0{,}4251 & 0{,}5749 \end{pmatrix}.$$

   En choisissant la bonne matrice, calculer P_3. En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2012 *(On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).*

3. Soit P la matrice ligne $(x \quad y)$ donnant l'état stable où x et y sont deux réels positifs tels que $x+y=1$.
   Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

Partie B

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = 0{,}3a_n + 0{,}3$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - \dfrac{3}{7}$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. En déduire l'expression de u_n, puis celle de a_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Que retrouve-t-on ?