

Partie A

Dans une résidence de vacances d'été, les touristes vont tous les jours à la plage. Ils disposent pour se déplacer de deux moyens de locomotion : un minibus ou des bicyclettes. Le séjour dure un mois pour tous les vacanciers.

Chaque jour, ils peuvent modifier leur choix de transport. Le premier jour, 80 % des touristes choisissent le minibus.

On considère qu'ensuite, chaque jour, 30 % de ceux qui ont pris le minibus la veille choisissent la bicyclette et 15 % des vacanciers qui avaient emprunté la bicyclette la veille, choisissent le minibus.

Soit n est un entier entre 1 et 31. On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste relatif au n -ième jour, où :

a_n représente la proportion des vacanciers choisissant le minibus le jour n ;

b_n représente la proportion des vacanciers choisissant la bicyclette le jour n .

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition, notée M , associée à cette situation.
3. Déterminer l'état initial P_1 .
4.
 - a. Calculer P_2 (faire apparaître les calculs). Interpréter le résultat obtenu.
 - b. On suppose que $M^5 = \begin{pmatrix} 0,367 & 0,633 \\ 0,317 & 0,683 \end{pmatrix}$ et $M^6 = \begin{pmatrix} 0,352 & 0,648 \\ 0,324 & 0,676 \end{pmatrix}$, les coefficients ayant été arrondis au millièmè.
En utilisant la matrice qui convient, déterminer la répartition prévisible le 6^e jour. On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1 % près.
5. Soit $P = (x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable.
Déterminer x et y ; en donner une interprétation.
6. Montrer que pour n entier compris entre 1 et 30 on a $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,15$.

Partie B

Pour n entier, $n \geq 1$, on définit la suite (u_n) par :

$$u_{n+1} = 0,55u_n + 0,15 \quad \text{et} \quad u_1 = 0,8.$$

1. On pose $U_n = u_n - \frac{1}{3}$.
Montrer que la suite (U_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme de cette suite.
2. Exprimer U_n puis u_n en fonction de n .
3. En déduire la limite de la suite (u_n) . Quel résultat retrouve-t-on ?