

Une étude statistique est réalisée chaque trimestre sur une population composée initialement de fumeurs. Certains d'entre eux s'arrêtent de fumer, d'autres qui ont arrêté, redeviennent fumeur.

On estime que :

- si un individu est fumeur, la probabilité qu'il arrête de fumer (qu'il devienne non fumeur) le trimestre suivant est 0,2;
- si un individu a arrêté de fumer (il est considéré alors comme non fumeur), la probabilité qu'il redevienne fumeur le trimestre suivant est 0,3.

On notera X l'évènement « l'individu est fumeur » et Y l'évènement « l'individu est non fumeur ».

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste et donner sa matrice de transition que l'on notera M (aucune justification n'est demandée, on respectera l'ordre alphabétique des sommets).
2. Pour un entier naturel n donné, on note x_n la proportion de fumeurs dans la population et y_n la proportion de non fumeurs au trimestre de rang n . On note $E_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système au trimestre de rang n .

On étudie une population initiale où tous les individus sont fumeurs. On a donc : $E_0 = (1 \ 0)$.

- a. Vérifier que la proportion de fumeurs à l'issue de deux trimestres est 0,7.
 - b. Déterminer l'état E_4 de la population à l'issue d'une année.
3. La répartition fumeurs/non fumeurs de la population converge vers un état stable : $E = (x \ y)$. Déterminer cet état.

Partie B

Le chiffre d'affaires d'un débitant de tabac sur une période donnée est fonction de deux variables : le nombre de consommateurs, c'est-à-dire de fumeurs, et le prix moyen du paquet de tabac.

On appelle z le chiffre d'affaire en milliers d'euros, x le nombre de consommateurs en milliers et y le prix du paquet de tabac en euros. On admettra que $z = xy$.

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on désigne par S la surface d'équation $z = xy$.

1. Le débitant a pour clients 1 000 consommateurs réguliers et le prix moyen du paquet de tabac est de 5 euros.
 - a. Quel est le chiffre d'affaires réalisé par le débitant ?
 - b. Soit, dans un plan P parallèle au plan de base xOy , la ligne de niveau $z = 5$ de la surface S .
On a tracé cette ligne de niveau sur la figure 1 donnée en annexe 1. Donner son équation de la forme $y = f(x)$.

Le nombre de consommateurs passe de 1 000 à 600. Quel devrait être, au centime d'euros près, le nouveau prix du paquet de tabac pour que le chiffre d'affaires du débitant reste égal à 5 000 € ?

Ligne de niveau $z = 5$ de la surface S .

