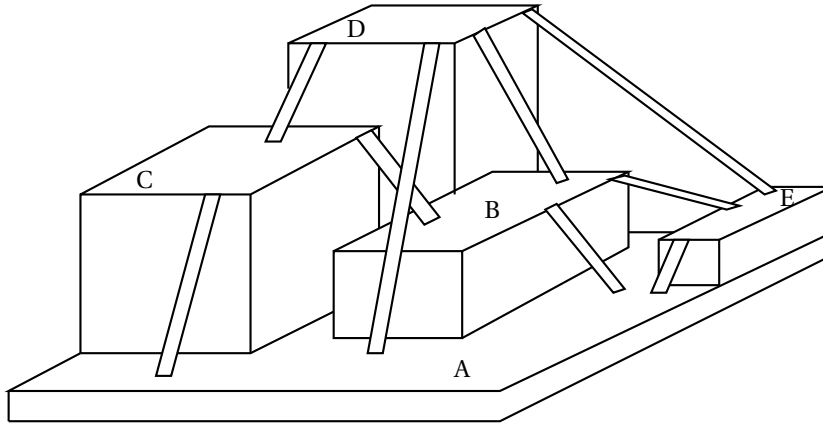


On considère un espace de jeu réservé à des enfants.

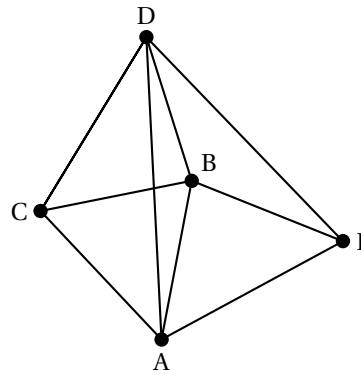
Les enfants peuvent se déplacer sur cinq plates-formes notées A, B, C, D et E.

Ces plates-formes sont reliées entre elles par un certain nombre de rampes, comme indiqué sur le schéma ci-dessous :



On représente cet espace de jeu par le graphe G ci-contre :

Une plate-forme est représentée par un sommet et une rampe est représentée par une arête.



**Partie A**

1. Donner un sous-graphe complet d'ordre 4 du graphe G.
2. En déduire un encadrement du nombre chromatique du graphe G, Justifier la réponse.
3. Proposer une coloration du graphe G en expliquant la méthode utilisée.
4. En déduire la valeur du nombre chromatique du graphe G.

**Partie B**

1. Ce graphe est-il connexe ? Est-il complet ? Justifier les réponses.
2. Ce graphe contient-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse.
3. Si on rajoute une arête à ce graphe, quels sommets peut-on alors relier pour que le graphe obtenu contienne un cycle eulérien ? Justifier la réponse.

**Partie C**

On décide de peindre les surfaces des cinq plates-formes en attribuant des couleurs différentes à deux plates-formes reliées par une rampe.

1. Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaire ? Justifier la réponse.
2. On propose aux enfants le jeu suivant : il s'agit de partir de la plateforme C et de rejoindre la plateforme E en utilisant toutes les rampes, et sans passer deux fois par la même rampe.  
Proposer un chemin remplissant les conditions exposées ci-dessus.
3. Pour faciliter le déplacement des enfants dans cet espace de jeu, on décide d'installer une nouvelle rampe. Où peut-on placer cette rampe pour obtenir l'existence d'un chemin qui, partant d'une plate-forme donnée, emprunte une et une seule fois chaque rampe pour revenir à la plate-forme initiale ? Justifier la réponse.