

Deux chaînes de télévision A et B programment chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes. On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant.

La première semaine, 70 % de ces téléspectateurs ont regardé la chaîne A.

Une étude statistique montre que :

15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.

10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante. On note respectivement  $a_n$  et  $b_n$  les proportions de téléspectateurs des chaînes A et B la  $n$ -ième semaine et  $P_n$  la matrice ligne  $(a_n \ b_n)$ . On a donc  $P_1 = (0,7 \ 0,3)$ .

1.
  - a. Déterminer le graphe probabiliste représentant la situation.
  - b. Donner la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe.
2. Calculer  $M^3$  à l'aide de la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à  $10^{-3}$  près. Quelle est la répartition des téléspectateurs entre les deux chaînes lors de la quatrième semaine ?
3. On considère la matrice ligne  $P = (a \ b)$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a + b = 1$ .
  - a. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $P = PM$ .
  - b. Interpréter les deux valeurs trouvées.
4. On admet que pour tout entier naturel  $n > 0$ , on a :  $a_n = 0,4 + 0,3 \times (0,75^{n-1})$ .
  - a. Résoudre l'inéquation  $a_n < 0,5$ .
  - b. À partir de quelle semaine l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera-t-elle celle de l'émission de la chaîne A ?