

Par suite d'une forte augmentation du prix des carburants de 2007 à 2008, certains salariés d'une entreprise changent de mode de déplacement pour se rendre sur leur lieu de travail.

En 2007, 60 % des salariés utilisaient leur voiture personnelle.

En 2008, 30 % des salariés utilisant leur voiture en 2007 ne l'utilisent plus et 5 % des personnes ne l'utilisant pas en 2007 l'utilisent en 2008.

On appelle les états suivants :

A l'état : « la personne utilise sa voiture » ;

B l'état : « la personne n'utilise pas sa voiture ».

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2008 et on appelle, pour tout entier naturel n , P_n , la matrice ligne donnant l'état probabiliste des moyens de déplacement des salariés de cette entreprise au cours de l'année $(2007 + n)$.

On pose $P_n = (a_n \ b_n)$ et on a $P_0 = (0,6 \ 0,4)$.

1. Tracer un graphe probabiliste représentant la situation décrite ci-dessus.
2. Donner la matrice de transition correspondant à ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. En supposant que cette évolution se poursuive et en utilisant la question précédente, quelle est la probabilité qu'un salarié de cette entreprise utilise sa voiture personnelle en 2009 ? En 2010 ?
(On arrondira les résultats obtenus au centième).
4.
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a la relation : $a_{n+1} = 0,7a_n + 0,05b_n$.
En déduire que $a_{n+1} = 0,65a_n + 0,05$.
 - b. On admet que a_n peut alors s'écrire, pour tout entier naturel n ,
$$a_n = \frac{1}{7} + \frac{16}{35} \times 0,65^n.$$
Vérifier la validité de cette formule pour a_0 , a_1 et a_2 .
5.
 - a. Déterminer la limite de la suite (a_n) .
 - b. En supposant que cette évolution se poursuive, est-il possible d'envisager qu'à terme aucun des salariés de cette entreprise n'utilise sa voiture personnelle pour aller au travail ?
Justifier la réponse.