On considère une population donnée d'une île de Bretagne se rendant régulièrement sur le continent. Deux compagnies maritimes A et B effectuent la traversée.
En 2008, 60 % de la population voyage avec la compagnie A. Les campagnes publicitaires font évoluer cette répartition. Une enquête indique alors que chaque année 20 % des clients de la compagnie A l'abandonnent au profit de la compagnie B et que 10 % des clients de la compagnie B choisissent la compagnie A.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de l'année $2008+n$ est défini par la matrice ligne $\begin{pmatrix}x_n & y_n\end{pmatrix}$ où x_n désigne la proportion de la population qui voyage avec la compagnie A et y_n la proportion de la population qui voyage avec la compagnie B.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3. Préciser l'état initial P_0 puis montrer que $P_1 = \begin{pmatrix}0,52 & 0,48\end{pmatrix}$.
4. Déterminer la répartition prévisible du trafic entre les compagnies A et B en 2011.
5. Déterminer l'état stable et l'interpréter.
6. Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = 0,7x_n + 0,1$.
7. On admet que, pour tout entier naturel n, $x_n = \dfrac{4}{15} \times 0,7^n + \dfrac{1}{3}$.
   Déterminer la limite de la suite (x_n) et l'interpréter.