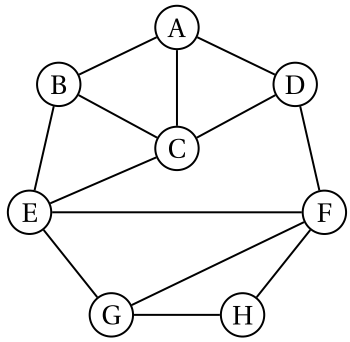
Partie A Étude d'un site

Un site internet comporte 8 pages, notées A, B, C, D, E, F, G, H reliées entre elles suivant le graphe ci-contre.

Ainsi, par exemple, à partir de la page A on peut directement accéder aux pages B, C et D.

Par contre, la page A ne permet pas d'accéder directement à la page F.



1. Le technicien souhaite tester les liens de pages. En partant de la page A, est-il possible de trouver un parcours passant une seule fois par tous les liens de pages ? Justifier la réponse.
2. Pour marquer les changements de page, l'administrateur du site souhaite que deux pages reliées aient des couleurs différentes.

   On note N le nombre minimum de couleurs nécessaires.

   a. Donner un sous-graphe complet d'ordre maximal.

   b. En utilisant la question 2. a. et à l'aide d'un algorithme, montrer, que $N = 3$.

Partie B Étude de propagation d'un virus d'un site à l'autre

Le site précédent, appelé site n° 1, propose un unique lien vers un site partenaire, appelé Site n° 2, sans retour possible. De même, le site n° 2 propose un unique lien vers un site n° 3, sans retour possible et ainsi de suite ... (voir le schéma ci-dessous) :

Site n° 1 $\longrightarrow$ Site n° 2 $\longrightarrow$ Site n° 3 $\longrightarrow$ ... $\longrightarrow$ Site n° n $\longrightarrow$ Site n° $n+1$ ...

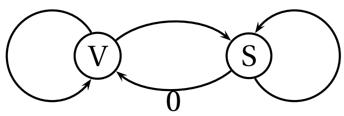
Le site n° 1 vient d'être infecté par un virus informatique qui utilise les liens entre les sites pour essayer de se propager, les autres sites n'étant pas encore touchés.

Face à ce nouveau virus, les antivirus ne sont efficaces qu'à 80 %. On note :

– V l'état « le site est infecté par le virus »

– S l'état « le site est sain (non infecté par le virus) ».

On a dessiné ci-dessous le graphe probabiliste traduisant les risques de propagation du virus d'un site au suivant :



1. Justifier la valeur 0 indiquée sur le graphe probabiliste précédent, puis recopier et compléter ce graphe sur votre copie.
2. Préciser la matrice de transition M de ce graphe (première ligne pour V, deuxième ligne pour S)

   Pour tout entier naturel non nul n, on note :

   P_n la probabilité que le n-ième site soit infecté, Q_n la probabilité que le n-ième site soit sain et $X_n = (P_n \quad Q_n)$.

   On a donc $X_1 = (1 \quad 0)$ (traduisant que le site n° 1 est infecté) et $X_{n+1} = X_n\,M$.
3. **a.** En utilisant la relation $X_{n+1} = X_nM$, montrer que $P_{n+1} = 0,2P_n$.

   b. En déduire P_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (P_n) lorsque n tend vers plus l'infini.