En 2010, les clients d'une banque nationale se répartissent en deux catégories distinctes :

- Catégorie A, composée des clients d'agence
- Catégorie I, composée des clients internet

En 2010, 92 % des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients sont des clients internet.
On admet que chaque année, 5 % des clients d'agence deviennent clients internet et inversement 1 % des clients internet deviennent clients d'agence.
On suppose que le nombre de clients de la banque reste constant au cours du temps et qu'un client ne peut faire partie des deux catégories.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des clients de cette banque dans les années à venir.

On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client d'agence à l'année $2010 + n$,
- i_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client internet à l'année $2010 + n$,
- $P_n = (a_n \quad i_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

On note M la matrice de transition, telle que pour tout entier naturel n,
$P_{n+1} = P_n \times M$.

Partie A État stable d'un graphe probabiliste

Dans cette partie, on donnera des valeurs approchées arrondies au centième.

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Donner P_0 la matrice traduisant l'état probabiliste initial.

   On admettra que $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$.
3. **a.** Calculer la matrice P_1.

   b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la répartition des clients de la banque en 2015.
4. Déterminer, par le calcul, l'état stable de la répartition des clients.
   Interpréter le résultat.

Partie B Étude de la limite d'une suite récurrente

1. **a.** À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et i_n.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,94a_n + 0,01$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - \dfrac{1}{6}$ pour tout entier naturel n.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite, géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{113}{150} \times 0,94^n + \dfrac{1}{6}$.

   d. Déterminer la limite de la suite a_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.