Un artisan glacier fabrique des glaces et des sorbets.
On appelle respectivement $x$ et $y$ les quantités de glace et de sorbet exprimées en centaines de litres, produites et vendues quotidiennement.
Le coût total de production $z$ exprimé en dizaines d'euros, est donné par la relation :

$$z = 2x^2 + y^2 - xy + 6x, \text{ avec } x \in [0~;~10] \text{ et } y \in [0~;~10].$$

Sur l'annexe 2 :

- la surface $(S)$ représentant le coût de production en fonction de $x$ et de $y$ dans un repère orthogonal est donnée en figure 1 ;
- la figure 2 représente la projection orthogonale de la surface $(S)$ sur le plan $(x\text{O}y)$ ;
- les courbes de niveau de cette surface sont représentées pour $z$ allant de 20 en 20.

**1.** **a.** C est le point de $(S)$ d'abscisse 6 et d'ordonnée 2.
Placer le point C sur la figure 1 donnée en annexe ?

**b.** Calculer la cote $z$ du point C précédent. Interpréter le résultat obtenu.

**c.** On suppose dans cette question que $y = 4$.
Exprimer alors $z$ en fonction de $x$.
En déduire la nature de la section de la surface $(S)$ par le plan d'équation $y = 4$.
Surligner en couleur cet ensemble sur la figure 1.

Pour des raisons de stockage et de rentabilité, la fabrication de $x$ centaines de litres de glace et de $y$ centaines de litres de sorbet engendre la contrainte : $x + y = 10$.
On note (E) l'ensemble des points du plan vérifiant cette contrainte.

**a.** La figure 2 donnée en annexe 2, représente les lignes de niveau des coûts de production.
Représenter l'ensemble (E) sur cette figure.

**b.** Vérifier que, sous la contrainte $x + y = 10$, $z$ peut s'écrire sous la forme :
$z = g(x)$, avec $g(x) = 4x^2 - 24x + 100$.

Dans la question suivante, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer les quantités de glace et de sorbet (en centaines de litres) qu'il faudrait produire pour que le coût de production soit minimum.

## ANNEXE 2 de l'exercice 3

**Figure 1**

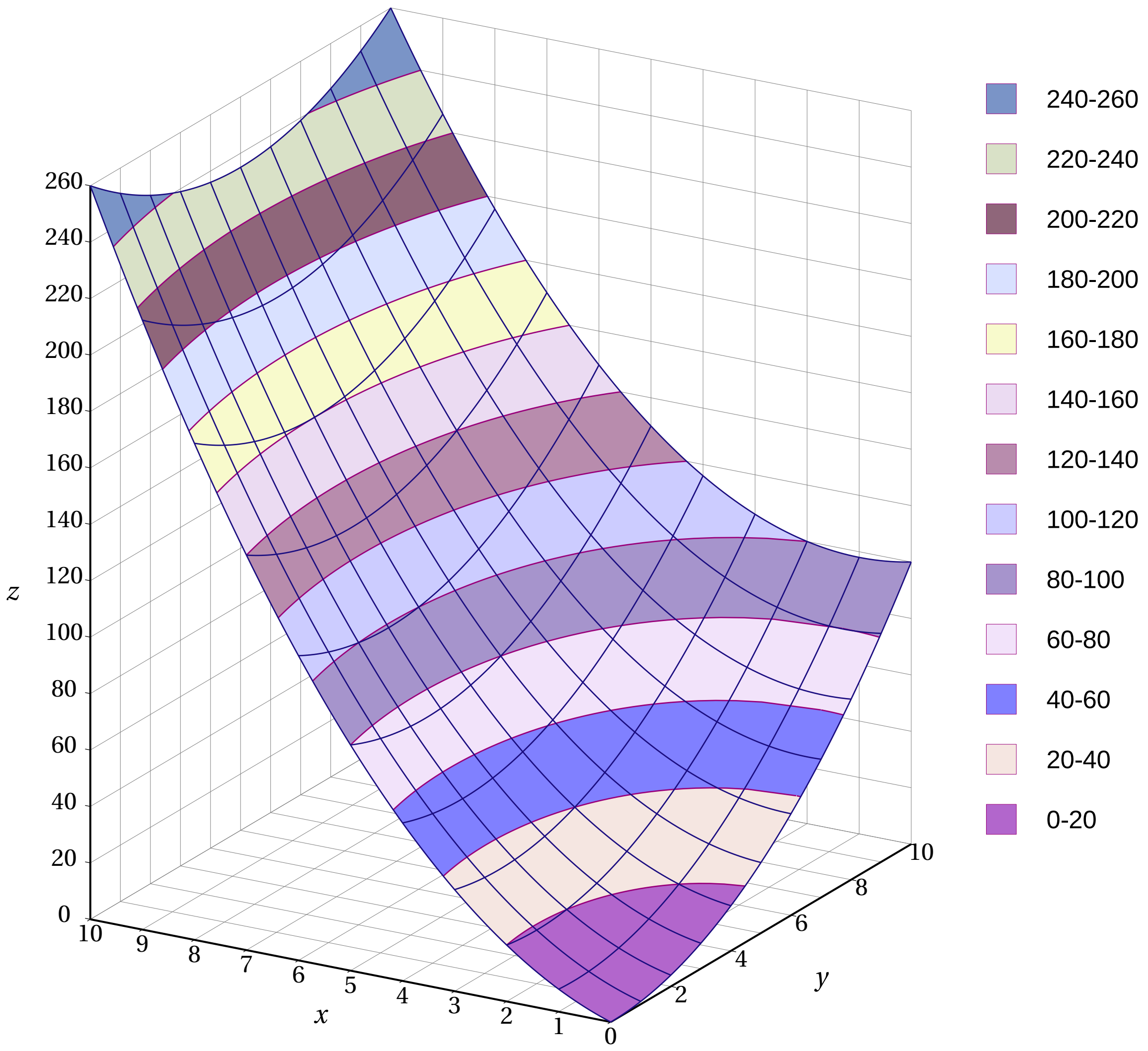


**Figure 2**