

Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».

Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :

- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.

Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau et 20 % reviennent au niveau A et les autres passent au niveau C,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A »,
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B »,
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = (a_n \ b_n \ c_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2010 + n$. Ainsi $P_0 = (0,2 \ 0,7 \ 0,1)$.

On se décide se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
2. Reproduire et compléter la matrice de transition M de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 0 \\ 0,2 & \dots & \dots \\ \dots & 0,15 & \dots \end{pmatrix}$$

3. Une seule des trois matrices Q , R , T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Le président de l'association affirme que 50 % des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?