On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x - 2.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.
Cette courbe est donnée sur la feuille annexe.

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que pour tout réel x on a l'égalité suivante :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + 2x\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{x}\right).$$

   b. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (on utilisera le fait que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$).

3. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

   a. Déterminer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x}}$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle$[0 ; 1]$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} :

5. On considère le point A de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $-\ln 3$.

   a. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.

   b. On note (T)la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
   Montrer que le coefficient directeur de la droite (T) vaut -1.

6. Sur le graphique donné (feuille annexe), tracer les droites (D) et(T).