I. Étude d'une fonction auxiliaire g

On note g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = \text{e}^{-x}(-3x+1)+1.$$

1. Calculer la dérivée g' de la fonction g.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variations (On ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.)
3. Calculer $g\left(\dfrac{4}{3}\right)$ et en déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

II. Étude de la fonction f .

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \text{e}^{-x}(3x+2)+x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étude des limites.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Déterminer lalimite de f en $-\infty$.
2. Étude des variations de f.
   a. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = g(x)$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Démontrer que la'droite $\mathscr{D}$ d'équition $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$. (On notera A leur point d'intersection.)
4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente $\mathscr{T}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
5. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$. Placer les points A et B puis tracer la courbe $\mathscr{C}$.