On considère la fonction f, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

Partie A : limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 4$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 4\right)$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B : intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses

En utilisant la forme factorisée de $f(x)$ donnée dans la partie A. 2. a., déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

Partie C : étude des variations de la fonction f

1. **a.** Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Montrer en **détaillant vos calculs** que $f\left(\ln \dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f.
4. À l'aide du tableau de variations et du résultat acquis à la partie B, donner le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Tracer la droite $(\mathscr{D})$ puis la courbe $(\mathscr{C})$, pour x appartenant à l'intervalle $[-4 ; 2]$, dans le repère défini en début de problème.