Partie A - Exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ est donnée sur la figure en annexe. On précise que la courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses au seul point d'abscisse 0 et admet en ce point comme tangente la droite d tracée sur la figure en annexe.

Soit g' la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$.

1. En prenant appui sur la représentation graphique donnée en annexe :
   - **a.** Indiquer à quel entier est égal $g(0)$.
   - **b.** Expliquer pourquoi $g'(0) = 2$.
   - **c.** Préciser sur quel intervalle la fonction g semble être positive.
2. On admet maintenant que $g(x) = ax + b + \mathrm{e}^x$ où a et b sont des réels que l'on va déterminer.
   - **a.** Déterminer b en utilisant la question **1. a.**.
   - **b.** Calculer $g'(x)$ en fonction de a puis déterminer a en utilisant la question **1. b.**.
   - **c.** En déduire que pour tout réel x,on a : $g(x) = x - 1 + \mathrm{e}^x$.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$f(x) = x - 4 - x\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Vérifier que, pour tout réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 - \dfrac{4}{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   - **b.** Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 4$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_1$.
   - **c.** Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_1$- par rapport à la droite L.
3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   - **a.** Pour tout réel x, calculer $f'(x)$, puis vérifier que : $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}$, où g est la fonction obtenue dans la partie A (question 2. c.).
   - **b.** En utilisant la question 1. c. de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$.
   - **c.** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. En prenant pour unité graphique 1 cm sur chaque axe, tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathscr{C}_1$ et l'asymptote Δ dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

ANNEXE