Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.
On s'intéresse dans ce problème à la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(X) = \frac{3}{\mathrm{e}^{3x}+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
   c. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x ; qu'en déduit-on sur la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à cette asymptote ?
2. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3$.
   a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $\mathscr{D}$ comme asymptote.
   c. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = 3 - \dfrac{3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}$.
   d. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et dc la droite $\mathscr{D}$.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-9\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations.
4. Déterminer une équation de la tangente Δ au point d'abscisse 0.
5. Dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathscr{D}$ et Δ ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.