Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
La représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ainsi qu'une droite $\mathcal{T}$ sont tracées dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan sur la feuille figurant en annexe.

- La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points de coordonnées $(-1\,;\,2)$ et $(0\,;\,4)$.
- La droite parallèle à l'axe des abscisses, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Partie A : étude graphique et détermination d'une fonction

1. Donner, les valeurs des nombres réels $f(0)$ et $f(-1)$.

2. Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points A_0 et A_1 d'abscisses respectives x_0 et x_1 avec $x_0 < x_1$, préciser à l'aide du graphique le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Déterminer graphiquement $f'(0)$.

b. Déterminer par lecture graphique le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,2]$.

4. On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$f(x) = (x+a)\text{e}^{-x} + bx^2 + 3.$$

En utilisant les résultats trouvés à la question 1, déterminer les nombres réels a et b.

Partie B : étude de la fonction f sans utilisation du graphique

On admet maintenant que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\text{e}^{-x} - x^2 + 3.$$

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2. En remarquant que $f(x) = x\text{e}^{-x} + \text{e}^{-x} - x^2 + 3$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

3. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = -x\left(\text{e}^{-x} + 2\right)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x et dresser le tableau de variation de f.

4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
Cette solution est l'abscisse x_1 du point A_1 définie dans la partie A question 2.

b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre réel x_1.

Feuille annexe