Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 4 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées).

PARTIE A : Étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on précisera une équation.

   b. Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 5\right) + 4$. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$.

   Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 5\right)$.

   b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation $2\mathrm{e}^{x} - 5 = 0$.

   Résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\mathrm{e}^{x} - 5 > 0$.

   c. En déduire les variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f\left(\ln \dfrac{1}{2}\right)$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

4. **a.** Montrer que le point O appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point O.

5. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ l'asymptote D la droite Δ et, sur l'intervalle $[-2,5\,;\,2]$, la courbe $\mathscr{C}$.