Partie I

On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = x - 1 + \mathrm{e}^{2x}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. On prend comme unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$.
   a. Démontrer que $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$.
   b. Étudier les positions relatives de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_g$.
3. Soit g' la fonction dérivée de g.
   a. Calculer, pour tout x réel, $g'(x)$ et montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b. Dresser le tableau de variations de g.
4. Calculer $g(0)$ puis justifier l'affirmation suivante : « si $x < 0$, alors $g(x) < 0$; si $x > 0$, alors $g(x) > 0$ ».
5. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_g$. (On utilisera une feuille de papier millimétré.)

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 + \mathrm{e}^{2x}.$$

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que, pour tout x réel, $f'(x) = 2g(x)$.
2. En utilisant la question I. 4., dresser le tableau de variation de la fonction f (les limites ne sont pas demandées).
3. En déduire la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un minimum et déterminer ce minimum.

Partie III - *Application à un problème de distance minimale*

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \mathrm{e}^x.$$

On donne en annexe la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h dans un repère orthonormal d'origine Ω. On a également représenté le point P de coordonnées $(1 ; 0)$.

On rappelle que, dans un repère orthonormal, le carré de la distance entre les points $\mathrm{A}\left(x_\mathrm{A},\ y_\mathrm{A}\right)$ et $\mathrm{B}\left(x_\mathrm{B},\ y_\mathrm{B}\right)$ est donné par : $\mathrm{AB}^2 = \left(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}\right)^2 + \left(y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}\right)^2$.

1. a. Placer, dans le repère donné en annexe, les points $\mathrm{A}\left(-1 ;\ \mathrm{e}^{-1}\right)$ et $\mathrm{B}(1 ;\ \mathrm{e})$
   b. Calculer PA^2 et PB^2.
2. On considère, pour un réel x, le point M de $\mathscr{C}_h$ d'abscisse x, c'est-à-dire le point $M(x ; \mathrm{e}^x)$.
   a. Montrer que $\mathrm{P}M^2 = f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la partie II.
   b. En déduire les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_h$ le plus proche du point P.
   Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Problème : partie II