Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ de la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x,\text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ désignent trois nombres réels tels que :}$$

- le point A de coordonnées $(0\ ;\ -1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}$;
- la courbe $\mathcal{C}$ admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
- $f(1) = 2\mathrm{e}$.

Partie A

1. Démontrer que $c = -1$.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

  a. En remplaçant c par sa valeur, donner pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et de b.

  b. Calculer a et b.

Partie B

On admet que pour tout réel x, $f(x) = \left(2x^2 + x - 1\right)\mathrm{e}^x$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

  b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$).
  Interpréter graphiquement ce résultat

2. **a.** Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = x(2x+5)\mathrm{e}^x$.

  b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x.

  c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.