Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (L'unité graphique est 4 cm.)
Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\text{e}^x + 1}{\text{e}^x + x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan $\mathscr{P}$.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \text{e}^x(x-2) - 1.$$

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Étude des variations de g
   a. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$
   a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

II - Étude de la fonction *f*

1. Étude de la limite en $+\infty$.
   a. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

   $$f(x) = \frac{1 + \text{e}^{-x}}{1 + x\text{e}^{-x}}.$$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Étude des variations de f
   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\text{e}^x + x)^2}$ où g est la fonction définie en 1.
   b. Déduire de la question I. 4., le sens de variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.