Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression :

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{x}\right) - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A Étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + 1}$.

   a. Étudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point E d'abscisse 0.

3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) - (x-1) = \ln(1 + \mathrm{e}^{x}) - \ln(\mathrm{e}^{x})$.
   En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) - (x-1) = \ln(\mathrm{e}^{-x} + 1)$.

   b. Déterminer la limite de $f(x) - (x-1)$ en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.

   c. Soit Δ la droite d'équation : $y = x - 1$.
   Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

4. En prenant comme unité graphique 2 cm sur chaque axe, construire sur une feuille de papier millimétré la droite T, la droite Δ, la droite d'équation : $x = 1$, et la courbe $\mathscr{C}_f$.