Partie A : Étude de signe

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel x, $g(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}\right)^{2} + 1$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

Partie B : Étude d'une fonction

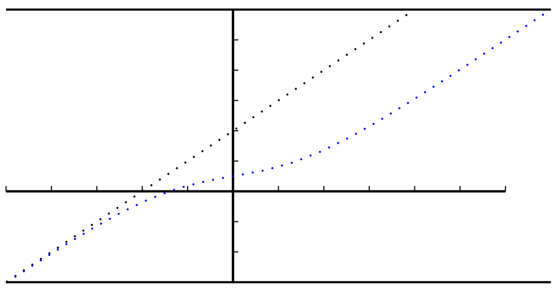
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 2 - \frac{3\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. On considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x + 2$.
   a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
   b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}_1$.
3. *Dans cette question, loute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   En visualisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_1$ sur l'écran d'une calculatrice graphique, on obtient le tracé suivant, pour les abscisses comprises entre -5 et 7 et les ordonnées comprises entre -3 et 6, les graduations apparentes sur les axes correspondent aux coordonnées entières.

   Au vu de ce tracé, deux élèves ont deviné que cette courbe admet une asymptote en $+\infty$, que l'on notera $\mathscr{D}_2$, le premier pense que $\mathscr{D}_2$ a pour équation $y = x - 1$, le deuxième n'est pas d'accord et pense que cette asymptote a pour éqllation $y = x - 2$.
   En effectuant un calcul de limite, déterminer lequel des deux a raison.
4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^{x} + 1)^{2}}$), où g désigne la fonction définie dans la partie A.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, qu'on notera α, sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$, puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

6. En utilisant une feuille de papier millimétré et en prenant comme unité graphique 2 cm, tracer, dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et Δ ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On pourra remarquer que $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

2. On note $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

a. Hachurer cette partie du plan.

b. On admet que la fonction f est positive sur $[-1\ ;\ 1]$. Écrire, à l'aide d'une intégrale, l'aire $\mathscr{A}$ exprimée en unités d'aire.

c. Montrer que $\ln(\mathrm{e}+1) - \ln\left(\mathrm{e}^{-1}+1\right) = 1$.

d. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.

3. On note $\mathscr{A}'$ l'aire de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x+2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$, exprimée en unités d'aire. Montrer que $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$.