Partie A : Détermination d'une fonction g

On désigne par (E) l'équation différentielle

$$2y' + y = 0,$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. y' désigne la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Soit f la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(2) = \text{e}$.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \text{e}^{2-\frac{1}{2}x}$.
3. Pour tout nombre réel x, on pose $g(x) = (2x+1)[f(x)]^2 - 9$.
   Montrer que $g(x) = (2x+1)\text{e}^{4-x} - 9$.

Partie B : Étude de la fonction g

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
2. **a.** Montrer, que pour tout nombre réel x, $g(x) = 2\text{e}^4 x\text{e}^{-x} + \text{e}^4\text{e}^{-x} - 9$.
   b. Utiliser cette expression pour déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
   c. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
3. **a.** On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = (1 - 2x)\text{e}^{4-x}$.
   b. Déterminer le sens des variations de g et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
4. **a.** Calculer la valeur exacte des nombres $g(-1)$ et $g(0)$.
   b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.
   c. Donner l'arrondi au centième de α.
5. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.
6. **a.** Compléter le tableau de valeurs de g qui se trouve sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
   On arrondira les valeurs à l'unité.
   b. Tracer la droite Δ, la droite $\mathscr{D}$, puis la courbe $\mathscr{C}$, dans le repère figurant sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Partie C : Calcul d'aire

1. Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$G(x) = (-2x-3)\text{e}^{4-x} - 9x$$
   est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.
2. **a.** Hachurer la partie $\mathscr{H}$ du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.
   b. Calculer en unités d'aire la mesure exacte de l'aire de la partie $\mathscr{H}$ du plan.
   c. En déduire en cm^2 la valeur arrondie au centième de l'aire de de $\mathscr{H}$.
   On rappelle que les unités graphiques sont : 2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée.

Annexe du problème à rendre avec la copie

Tableau des valeurs de la fonction g (valeurs arrondies à l'unité)

x	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$g(x)$											

Repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée