Partie A

On donne en annexe la courbe représentative Γ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente Δ au point d'abscisse 0.

1. Par lecture graphique, donner les valeurs entières de $g(0)$ et de $g'(0)$.

2. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x,
$g(x) = \mathrm{e}^x + ax + b$.
On note g' la dérivée de la fonction g.

- **a.** Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
- **b.** À l'aide des résultats des deux questions précédentes calculer les valeurs de a et de b.

3. Dans la suite du problème on admet que, pour tout réel x, $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x + 2$.

- **a.** Étudier le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variations dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (les limites ne sont pas demandées).
- **b.** En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
- **c.** Comment ce résultat se traduit-il graphiquement ?

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\left(1 + 2\mathrm{e}^{-x}\right)$$

On note f' la dérivée de la fonction f et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 centimètres en abscisse et 1 centimètre en ordonnée.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2.
- **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- **b.** Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite D d'équation $y = x$.
- **c.** Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D. On précisera leur point d'intersection.

3.
- **a.** Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x)$.
- **b.** En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$.
- **c.** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

5. Sur une feuille de papier millimétré qui vous sera fournie, tracer les droites D et T ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

On note $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en centimètres carrés, de l'aire du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$ la droite D l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

1. Hachurer le domaine ainsi défini.

2. Soient h et H les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$ et
$H(x) = 2(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis en donner une valeur arrondie au millimètre carré près.

Annexe (problème - partie A)