On considère la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 4\mathrm{e}^{-x} + 6x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A : Étude des limites et recherche d'une asymptote

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x} + 4 + 6x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}\right)$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. On note h la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par
   $h(x) = f(x) - (6x + 1)$.
   Déterminer la limite de h en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
4. Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 6x + 1$.

Partie B : Étude des variations de la fonction f

1. Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie pour tout nombre réel x par :

$$f'(x) = -2\left(\mathrm{e}^{-x} + 3\right)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right).$$

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'inéquation $\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0$; en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Construire la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C : Calcul d'aire

m étant un nombre réel strictement positif, on note $\mathscr{A}(m)$ l'aire, en unités d'aire, comprise entre la droite $\mathscr{D}$, la courbe $\mathscr{C}$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = m$.

1. Exprimer $\mathscr{A}(m)$ en fonction de m.
2. Calculer $\mathscr{A}(1)$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie au centième.
3. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation
   $-4\mathrm{e}^{-2x} - 32\mathrm{e}^{-x} + 17 = 0$ (on pourra poser $X = \mathrm{e}^{-x}$).
4. Déterminer le réel $m > 0$, tel que $\mathscr{A}(m) = \dfrac{19}{8}$.