On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = -\mathrm{e}^{-x} + x^2 + x.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie pour tout nombre réel x par : $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$. On note g' la fonction dérivée de g.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire le sens de variation de g sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et dresser son tableau de variations. On précisera la valeur exacte de l'extremum de g.
4. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout nombre réel x.

Partie B : Étude de la fonction f

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Étude des limites de f
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Vérifier que $f(x) = x^2\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(-x)^2} + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Étude des variations de f
   a. Montrer que pour tout nombre réel x : $\quad f'(x) = g(x)$.
   b. Déduire de la partie A le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. On considère la fonction p définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $p(x) = x^2 + x$.
   Sa courbe représentative notée $\mathcal{P}$ est représentée sur la feuille annexe.
   a. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{P}$.
   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x) - p(x)]$.
5. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathcal{C}$ sur la feuille annexe en tenant compte des précédents résultats.

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit β un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}(\beta)$ du domaine plan compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ d'une part, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \beta$ d'autre part.
2. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\beta)$ quand β tend vers $+\infty$.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie