Les objectifs de ce problème sont :

– l'étude de quelques propriétés d'une fonction f et de sa courbe représentative,
– un calcul d'aire entre deux courbes.

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x^2 + x + \mathrm{e}^{-x}$,
où y est une fonction de la variable réelle x et y' sa dérivée.
Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1,$$

où k désigne une constante réelle.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que la fonction f est solution de l'équation (E).
3. Déterminer le réel k pour que $f(0) = 1$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{P}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$. Interpréter graphiquement ce dernier résultat.

   c. Étudier sur $\mathbb{R}$ la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x) + 2x - 1$.

   b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

3. Sur la feuille annexe :

   a. Compléter le tableau de valeurs arrondies au centième.

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le cadre où a déjà été tracée la courbe $\mathscr{P}$.

Partie C

1. Démontrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x - 1)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
2. Soit A la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$ où α est un nombre réel supérieur ou égal à 2.

   a. Colorier la partie A sur la feuille annexe dans le cas particulier où $\alpha = 2$.

   b. Pour $\alpha \geqslant 2$ quelconque, déterminer l'aire de la partie A en fonction de α, en unités d'aire puis en cm^2.

   c. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \left(-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha} + 1\right)$.

   d. Quelle est la limite de l'aire de A en cm^2 lorsque α tend vers $+\infty$?

FEUILLE ANNEXE À RENDRE OBLIGATOIREMENT AVEC LA COPIE

x	-2	$-1,5$	$-1,1$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$