PARTIE A : étude graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2\text{e}^{2x} - 4\text{e}^{x}}{\text{e}^{2x} - 4\text{e}^{x} + 5}.$$

On a représenté en annexe la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\, \overrightarrow{\text{OI}},\, \overrightarrow{\text{OJ}}\right)$ (avec OI = OJ = 2 cm).

La tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point B$(0\,;\,-1)$ passe par le point M$(-1\,;\,0)$.

1. **a.** Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{2 - 4\text{e}^{-x}}{1 - 4\text{e}^{-x} + 5\text{e}^{-2x}}$.
   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe $(\mathcal{C})$, et compléter le graphique en annexe.

   b. Montrer que le point A$(\ln 2\,;\,0)$ est un point de la courbe $(\mathcal{C})$.
2. Par lecture graphique, en justifiant :

   a. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

   b. Déterminer la valeur de $f'(0)$.

PARTIE B : étude d'une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \ln\left(\text{e}^{2x} - 4\text{e}^{x} + 5\right).$$

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\, \overrightarrow{\text{OI}},\, \overrightarrow{\text{OJ}}\right)$.

1. Étudier la limite de la fonction F en $-\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).
2. **a.** Montrer que pour tout réel x : $F(x) = 2x + \ln\left(1 - 4\text{e}^{-x} + 5\text{e}^{-2x}\right)$.

   b. Calculer la limite de la fonction F en $+\infty$ et la limite de $F(x) - 2x$ en $+\infty$.

   c. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).
3. **a.** Démontrer que la fonction f est la fonction dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

   b. Vérifier que $F(\ln 2) = 0$.

   c. Déduire de la partie A le tableau de variations de la fonction F.
4. Reproduire et compléter le tableau suivant avec des valeurs approchées à 10^{-2} près :

x	-2	-1	0	0,5	1	2
$F(x)$						

5. Tracer la courbe (Γ) dans un repère orthononné $\left(\text{O}\,;\, \overrightarrow{\text{OI}},\, \overrightarrow{\text{OJ}}\right)$ en faisant apparaitre les interprétations graphiques des questions 1. et 2. c.

PARTIE C : calcul d'une aire

1. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\ln 2}^{2} f(x)\,\text{d}x$.
2. De quel domaine le calcul précédent permet-il de calculer l'aire ?
   Hachurer sur le graphique de la feuille annexe ce domaine, et déterminer une valeur approchée de la mesure, en cm^2, de son aire (on exprimera la réponse à 0,01 cm^2 près).

ANNEXE à rendre avec la copie