Partie A : résolution d'une équation différentielle

Dans cette partie, on se propose de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y' + 2y = x$$

où y désigne une fonction numérique de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_2): \quad y' + 2y = 0$.
2. Vérifier que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, par $u(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$, est une solution de l'équation différentielle (E_1).
3. On admet que toute solution φ de l'équation (E_1) est de la forme $\varphi(x) = u(x) + C\mathrm{e}^{-2x}$ où C est un nombre réel quelconque et u la fonction définie à la question 2.

   Déterminer la solution φ_0 de l'équation (E_1) telle que : $\varphi_0(0) = \dfrac{3}{4}$.

Partie B : étude d'une fonction

medskip

On note f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-2x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unités 4 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

1. Étude des limites de la fonction f
   - **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty\cdot$
   - **b.** Justifier que $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + 1\right)$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.
   - **c.** Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
2. Étude des variations de la fonction f
   - **a.** Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction $f\cdot$
   - **b.** Résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant \dfrac{1}{4}$ et en déduire le tableau des variations de la fonction f.
   - **c.** Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
   - **d.** Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. Justifier avec précision et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.
3. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$, puis tracer la courbe $\mathscr{C}$

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit m un nombre réel strictement supérieur à $\ln 2$. On note $\mathscr{A}(m)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = m\cdot$

   Déterminer $\mathscr{A}(m)$ en fonction de m.
2. Calculer la limite de $\mathscr{A}(m)$ lorsque m tend vers $+\infty\cdot$